Logarithmen und Exponentialgleichungen

W. Kippels

26. Dezember 2023

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

> *Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.*

Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: mail@dk4ek.de

Vielen Dank!

2 Definitionen

In der Potenzrechnung haben wir gelernt, dass bei einer Potenz $a^n = b$ bezüglich a und n **kein** Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz) gilt. Es gibt also **zwei** Umkehrungen. Die erste, wenn a gesucht ist, haben wir schon als **Wurzel** kennen gelernt: $a = \sqrt[n]{b}$. Die zweite Umkehrung ist der **Logarithmus**, geschrieben als $\log_a b$. Gesprochen wird das als *Logarithmus zur Basis a von b*. Folgende drei Formeln stellen also den gleichen Zusammenhang zwischen a, b und n dar:

$$b = a^n \qquad \Leftrightarrow \qquad a = \sqrt[n]{b} \qquad \Leftrightarrow \qquad n = \log_a b$$

Zum besseren Verständnis berechnen wir jetzt einige Logarithmen, indem wir sie als Potenz schreiben.

$$\begin{array}{rclclcl}
\log_2 8 = n & \Leftrightarrow & 2^n = 8 & \Leftrightarrow & 2^3 = 8 & \Leftrightarrow & n = 3 \\
\log_5 25 = n & \Leftrightarrow & 5^n = 25 & \Leftrightarrow & 5^2 = 25 & \Leftrightarrow & n = 2 \\
\log_{10} 10\,000 = n & \Leftrightarrow & 10^n = 10\,000 & \Leftrightarrow & 10^4 = 10\,000 & \Leftrightarrow & n = 4 \\
\log_e 1 = n & \Leftrightarrow & e^n = 1 & \Leftrightarrow & e^0 = 1 & \Leftrightarrow & n = 0
\end{array}$$

Wie man sieht, kann man schon einige Logarithmen im Kopf ausrechnen, wenn man sich den Zusammenhang als Potenz umschreibt.

Im Prinzip kann man Logarithmen zu jeder **positiven** Basis berechnen. Versuchte man, die Definition für **negative** Basen zu erweitern, führte das zu Widersprüchen, auf die ich hier aber nicht näher eingehen möchte. $\mathbb{R}^+$ ist also die Definitionsmenge für die Basis a. Die gleiche Definitionsmenge gilt auch für die Zahl b, von der der Logarithmus bestimmt werden soll.

Nun gibt es in der Praxis ein paar Basen, von denen besonders oft ein Logarithmus berechnet wird. Diese bevorzugten Basen sind die Zahlen 10 und 2 sowie die Eulersche Zahl e mit $e \approx 2,718\,281\,828\,459\,045$. Daher hat man für diese speziellen Logarithmen abgekürzte Schreibweisen eingeführt. Diese lauten wie folgt:

$$\begin{array}{rcl}
\log_e x & = & \ln x \\
\log_{10} x & = & \lg x \\
\log_2 x & = & \mathrm{lb}\, x
\end{array}$$

3 Gesetze

Aus den Potenzrechengesetzen ergeben sich die folgenden 5 Logarithmengesetze:

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \tag{1}$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c \tag{2}$$

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b \tag{3}$$

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{\log_a b}{n} \tag{4}$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \tag{5}$$

Je nach dem, welche Literatur man befragt, sind die beiden letzten Gesetze auch nicht aufgeführt. Sie gelten aber natürlich trotzdem.

4 Logarithmen und Taschenrechner

Zunächst eine schlechte Nachricht: Die gängigen Taschenrechner können **nicht** mit dem allgemeinen Logarithmus rechnen, sondern nur mit dem **natürlichen Logarithmus** $\ln x$ und dem **Zehnerlogarithmus** $\lg x$. Wie wir aber später sehen werden, kann man trotzdem allgemeine Logarithmen bestimmen.[1]

Zunächst möchte ich aber auf ein Problem bei der Beschriftung der Taschenrechner hinweisen. Da diese zuerst in den USA entwickelt wurden und auch heute noch US-amerikanische Rechnerhersteller führend sind, verwenden diese die landeseigenen Schreibweisen und nicht die allgemeingültigen weltweiten Standards. Bekanntlich rechnet man in USA ja auch heute noch mit den mittelalterlichen Maßen wie Zoll, Fuß und Meilen, obwohl eigentlich seit der französischen Revolution weltweit einheitliche Standards wie Meter, Kilometer usw. vereinbart sind. Ähnlich zurückhaltend ist man in den USA auch mit der Anpassung der landeseigenen verwendeten mathematischen Symbolen an Weltstandards gewesen, so dass dort für den Zehnerlogarithmus folgende Kurzschreibweise verwendet wird:

$$\log x = \log_{10} x$$

Diese Schreibweise ist meines Erachtens auch deshalb unglücklich gewählt, weil es so aussieht, als hätte man nur „vergessen“, die Basis dranzuschreiben. Wie dem auch sei – wir müssen damit leben.

[1]Inzwischen gibt es zunehmend Rechner, die auch den Logarithmus zu einer beliebigen Basis berechnen können.

Der **binäre Logarithmus** lb ist an den gängigen Rechnern **nicht** vertreten. Es gilt also folgende Zuordnung für die Beschriftung unserer Rechner:

Taste:	Symbol:	Bedeutung:
log	$\lg x$	Zehnerlogarithmus
ln	$\ln x$	Natürlicher Logarithmus

Bei der Bedienung des Taschenrechners gibt es zwei grundsätzlich verschiedene Philosophien der Hersteller. Hier steht auf der einen Seite die schnelle Bedienung, auf der anderen Seite die leichte Erlernbarkeit im Vordergrund.

- Vorwiegend die älteren Rechner aber auch einige moderne Rechner von Texas-Instruments erwarten bei der Eingabe von Funktionen zuerst die Eingabe des Zahlenwertes. Erst danach wird die zugehörige Funktionstaste gedrückt.

- Rechner von Casio und Sharp sowie zunehmend andere modernere Rechner erwarten eine Eingabe entsprechend der mathematischen Schreibweise; es muss also erst die Funktionstaste gedrückt werden, bevor der Zahlenwert eingegeben wird. Zum Abschluss muss hier noch eine andere Rechentaste – beispielsweise das Gleichheitszeichen – betätigt werden.

Jeder sollte wissen, welche Philosophie der eigene Rechner vertritt. Man kennt das ja schon von den Funktionen **sin**, **cos** oder **tan**. Um beispielsweise den Zehnerlogarithmus von 1000 zu berechnen, muss folgende Tastenfolge verwendet werden, um das richtige Ergebnis 3 zu erhalten:

Rechner Typ 1: 1000 $\boxed{\text{log}}$

Rechner Typ 2: $\boxed{\text{log}}$ 1000 $\boxed{=}$

Es steht noch die Frage im Raum, wie **beliebige Logarithmen** berechnet werden können. Das Gesetz (5) ermöglicht uns dies mit dem Taschenrechner. Da der Parameter c frei wählbar ist, kann man hier eine Basis verwenden, den unser Rechner kennt, also e oder 10. Ein Beispiel:

$$\log_4 512 = \frac{\ln 512}{\ln 4} = 4{,}5$$

Das gleiche Ergebnis erhält man auch, wenn man den Zehnerlogarithmus verwendet:

$$\log_4 512 = \frac{\lg 512}{\lg 4} = 4{,}5$$

Probieren Sie es ruhig aus!

5 Exponentialgleichungen

Eine Exponentialgleichung ist eine Gleichung, bei der die gesuchte(n) Größe(n) im Exponenten stehen. Hierzu ein Beispiel aus der Elektrotechnik.

Wird an einen Kondensator mit der Kapazität C, der mit der Gleichspannung U_0 geladen ist, zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Widerstand R angeschlossen, dann ergibt sich die zeitabhängige Spannung u_c am Kondensator nach folgender Funktionsgleichung:

$$u_c(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

Will man diese Gleichung nach t, nach R oder nach C auflösen, dann benötigt man einige der Logarithmengesetze.

Wir wollen die Funktionsgleichung einmal nach t auflösen.

$$\begin{aligned}
u_c &= U_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} && | : U_0 \\
\frac{u_c}{U_0} &= e^{-\frac{t}{R \cdot C}} && | \ln() \\
\ln \frac{u_c}{U_0} &= \ln e^{-\frac{t}{R \cdot C}} && |\text{Gesetz } 3 \\
\ln \frac{u_c}{U_0} &= -\frac{t}{R \cdot C} \cdot \ln e && | \ln e = 1 \\
\ln \frac{u_c}{U_0} &= -\frac{t}{R \cdot C} && | + \frac{t}{R \cdot C} - \ln \frac{u_c}{U_0} \\
\frac{t}{R \cdot C} &= -\ln \frac{u_c}{U_0} && | \cdot (R \cdot C) \\
t &= -R \cdot C \cdot \ln \frac{u_c}{U_0}
\end{aligned}$$

Ähnlich kann die Gleichung natürlich auch nach R oder nach C auflösen.

Anmerkung: Man könnte hier auf die Idee kommen, den Term $\ln \frac{u_c}{U_0}$ mit Hilfe des Gesetzes (2) umzuformen zu $\ln u_c - \ln U_0$. Das ist **nicht** möglich, weil das Argument des Logarithmus (also der Ausdruck, von dem der Logarithmus gebildet werden soll) eine **dimensionslose** Größe sein muss, also keine Spannung mit der Einheit Volt sein darf.

Allgemeines zu Exponentialgleichungen Eine Exponentialgleichung ist eine Gleichung, bei der die Variable(n) irgendwo in einem (oder mehreren) Exponenten stehen. Zur Lösung dieser Gleichung muss im Verlauf der Rechnung an einer Stelle der Logarithmus zu einer bestimmten Basis gebildet werden. Ist die Basis die Eulersche Zahl e oder die 10, dann ist das auch einfach zu rechnen. Der Taschenrechner unterstützt diese beiden Basen.

Falls verschiedene Basen auftreten, sollte man zunächst prüfen, ob sie nicht auf die gleiche Basis zurückgeführt werden können. Hierzu ein Beispiel:

$$\begin{aligned}
9^{x+1} &= 27^{x+2} \\
\left(3^2\right)^{x+1} &= \left(3^3\right)^{x+2} \\
3^{2(x+1)} &= 3^{3(x+2)} \\
3^{2x+2} &= 3^{3x+6} \qquad |\log_3 \ldots \\
2x+2 &= 3x+6 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Treten verschiedene Basen auf, die **nicht** auf die gleiche Basis zurückgeführt werden können, empfiehlt es sich, die Gleichung zu einer bekannten Basis zu logarithmieren, also den lg oder den ln zu bilden.

***Achtung!* Das nützt nur, wenn keine Summen in der Gleichung stehen!**

Auch hierzu ein Beispiel:

$$\begin{aligned}
2^{x+1}\cdot 3^{2x-1} &= 5^{x-2} && |\ln\ldots \\
\ln\left(2^{x+1}\cdot 3^{2x-1}\right) &= \ln 5^{x-2} \\
\ln 2^{x+1} + \ln 3^{2x-1} &= \ln 5^{x-2} \\
(x+1)\cdot\ln 2 + (2x-1)\cdot\ln 3 &= (x-2)\cdot\ln 5 \\
x\cdot\ln 2 + \ln 2 + 2x\cdot\ln 3 - \ln 3 &= x\cdot\ln 5 - 2\cdot\ln 5 && |-\ln 2 + \ln 3 - x\cdot\ln 5 \\
x\cdot\ln 2 + 2x\cdot\ln 3 - x\cdot\ln 5 &= -2\ln 5 - \ln 2 + \ln 3 \\
x\cdot(\ln 2 + 2\ln 3 - \ln 5) &= -2\ln 5 - \ln 2 + \ln 3 && |:(\ldots) \\
x &= \frac{-2\ln 5 - \ln 2 + \ln 3}{\ln 2 + 2\ln 3 - \ln 5}
\end{aligned}$$

Stehen Summen in der Gleichung, dann kann man versuchen, sie durch geschicktes Ausklammern in Produkte umzuformen. Geht das auch nicht, ist kaum noch eine analytische Lösung möglich. Ein Beispiel:

$$\begin{aligned}
2^{x+1} + 3\cdot 2^{x+1} &= 2^{2x} \\
(1+3)\cdot 2^{x+1} &= 2^{2x} \\
4\cdot 2^{x+1} &= 2^{2x} \\
2^2\cdot 2^{x+1} &= 2^{2x} \\
2^{2+x+1} &= 2^{2x} \qquad |\log_2\ldots \\
2+x+1 &= 2x \qquad |-x \\
3 &= x
\end{aligned}$$

6 Übungsaufgaben zu Exponentialgleichungen

Gesucht ist die Lösungsmenge der nachfolgenden Exponentialgleichungen.

6.1 Aufgabe 1

$$3^{2x-1} = 3^{3x+5}$$

6.2 Aufgabe 2

$$5^{1-2x} = 5^{3x-9}$$

6.3 Aufgabe 3

$$7^{3x+2} - 7^{2x+3} = 0$$

6.4 Aufgabe 4

$$6^{5x-1} = 6^{3x+3}$$

6.5 Aufgabe 5

$$2^{2x+1} \cdot 2^{2x+1} = 2^{5x-5}$$

6.6 Aufgabe 6

$$2^{2x+1} + 2^{2x+1} = 2^{5x-7}$$

6.7 Aufgabe 7

$$3^{3x+1} = 3^{2x-1} \cdot 3^{2x-1}$$

6.8 Aufgabe 8

$$3^{3x+1} = 3^{2x-1} + 2 \cdot 3^{2x-1}$$

6.9 Aufgabe 9

$$2 \cdot 5^{3x+3} \cdot 3 \cdot 5^{3x+3} = 5^{4x}$$

6.10 Aufgabe 10

$$2 \cdot 5^{3x+3} + 3 \cdot 5^{3x+3} = 5^{4x}$$

6.11 Aufgabe 11

$$12 \cdot 3^{2x-3} \cdot 2^{x-3} = 6^{x-1}$$

6.12 Aufgabe 12

$$3 \cdot 2^{4x-7} + 2^{4x-7} = 8$$

6.13 Aufgabe 13

$$2^{-x+3} \cdot 5^{2x+12} = 10^{3x+15}$$

6.14 Aufgabe 14

$$2^{3x-1} \cdot 3^{x+1} = 12^{2x-2}$$

6.15 Aufgabe 15

$$\frac{2^{2x+2}}{3^{4x-4}} = \frac{2^{3x} \cdot 3^{2x-4}}{3^{x+2}}$$

6.16 Aufgabe 16

$$\frac{3^{x-2}}{5^{2x-8}} = \frac{5^{3x-7} \cdot 2^{3x-8}}{3^{2x-7} \cdot 2^{x-2}}$$

6.17 Aufgabe 17

$$8^{x+4} \cdot 16^{x+3} = 32^{x+4} \cdot 4$$

6.18 Aufgabe 18

$$81^{3x} \cdot 27^{4x+1} \cdot 9^{2x-1} = 3^{5x+1}$$

6.19 Aufgabe 19

$$14^{2x+7} \cdot 7^{x-1} = 2^{3x+9}$$

6.20 Aufgabe 20

$$6^{-2x} \cdot 2^{x} = 18^{x+6}$$

6.21 Aufgabe 21

$$\frac{12^{2x-2}}{4^{3x-4}} = 3^{4x-6}$$

6.22 Aufgabe 22

$$\frac{54^{2x-11}}{9^{3x-20}} = 6^{x-2}$$

6.23 Aufgabe 23

$$\frac{4^{x+1}}{81^{x-1}} = \frac{8^x \cdot 9^{x-2}}{3^{x+2}}$$

6.24 Aufgabe 24

$$\frac{5^{x+9}}{10^{2x+13}} = \frac{2^{x+2}}{5^{x+4}}$$

6.25 Aufgabe 25

$$\frac{7^{2x+4}}{7^{3x+5}} = 5^{x+1}$$

6.26 Aufgabe 26

$$\frac{5^{2x+1}}{7^{3x-9}} = 5^{x+4}$$

6.27 Aufgabe 27

$$125^{x+3} \cdot 25^{x+5} = 625^{x-1}$$

6.28 Aufgabe 28

$$81^{x+2} \cdot 9^{x-3} = 27^{2x-3}$$

6.29 Aufgabe 29

$$\left(5^{3x}\right)^2 \cdot \left(5^4\right)^{x-2} = \left(5^{2x}\right)^3$$

6.30 Aufgabe 30

$$\left(3^{6x}\right)^2 \cdot \left(2^4\right)^{x-1} = \left(3^{4x}\right)^3$$

6.31 Aufgabe 31

$$\frac{e^{4x+5}}{e^{6x-2}} = 10^{2x-7}$$

6.32 Aufgabe 32

$$\frac{2^{x+6}}{10^{4x+12}} = \frac{4^{2x+8}}{20^{2-x}}$$

7 Ergebnisse der Übungsaufgaben

7.1 Aufgabe 1

$$L = \{-6\}$$

7.2 Aufgabe 2

$$L = \{2\}$$

7.3 Aufgabe 3

$$L = \{1\}$$

7.4 Aufgabe 4

$$L = \{2\}$$

7.5 Aufgabe 5

$$L = \{7\}$$

7.6 Aufgabe 6

$$L = \{3\}$$

7.7 Aufgabe 7

$$L = \{3\}$$

7.8 Aufgabe 8

$$L = \{-1\}$$

7.9 Aufgabe 9

$$L = \{-3,5566\ldots\}$$

7.10 Aufgabe 10

$$L = \{4\}$$

7.11 Aufgabe 11

$$L = \{1\}$$

7.12 Aufgabe 12

$$L = \{2\}$$

7.13 Aufgabe 13

$$L = \{-3\}$$

7.14 Aufgabe 14

$$L = \{3\}$$

7.15 Aufgabe 15

$$L = \{2\}$$

7.16 Aufgabe 16

$$L = \{3\}$$

7.17 Aufgabe 17

$$L = \{-1\}$$

7.18 Aufgabe 18

$$L = \{0\}$$

7.19 Aufgabe 19

$$L = \{-2\}$$

7.20 Aufgabe 20

$$L = \{-3\}$$

7.21 Aufgabe 21

$$L = \{2\}$$

7.22 Aufgabe 22

$$L = \{9\}$$

7.23 Aufgabe 23

$$L = \{2\}$$

7.24 Aufgabe 24

$$L = \{-5\}$$

7.25 Aufgabe 25

$$L = \{-1\}$$

7.26 Aufgabe 26

$$L = \{3\}$$

7.27 Aufgabe 27

$$L = \{-23\}$$

7.28 Aufgabe 28

$$L = \{\ \}$$

7.29 Aufgabe 29

$$L = \{2\}$$

7.30 Aufgabe 30

$$L = \{1\}$$

7.31 Aufgabe 31

$$L = \{\frac{7}{2}\}$$

7.32 Aufgabe 32

$$L = \{-2\}$$

8 Durchgerechnete Musterlösungen

8.1 Aufgabe 1

$$\begin{aligned} 3^{2x-1} &= 3^{3x+5} && |\log_3 \ldots \\ 2x-1 &= 3x+5 && |-3x+1 \\ -x &= 6 && |:(-1) \\ x &= -6 \\ L &= \{-6\} \end{aligned}$$

8.2 Aufgabe 2

$$\begin{aligned} 5^{1-2x} &= 5^{3x-9} && |\log_5 \ldots \\ 1-2x &= 3x-9 && |-3x-1 \\ -5x &= -10 && |:(-5) \\ x &= 2 \\ L &= \{2\} \end{aligned}$$

8.3 Aufgabe 3

$$\begin{aligned} 7^{3x+2}-7^{2x+3} &= 0 && |+7^{2x+3} \\ 7^{3x+2} &= 7^{2x+3} && |\log_7 \ldots \\ 3x+2 &= 2x+3 && |-2x-2 \\ x &= 1 \\ L &= \{1\} \end{aligned}$$

Aber Vorsicht! Was **nicht** geht, ist folgendes:

$$\begin{aligned} 7^{3x+2}-7^{2x+3} &= 0 && |\log_7 \ldots \\ (3x+2)-(2x+3) &= \log_7 0 \end{aligned}$$

Folgende Fehler wurden dabei gemacht.

- Linke Seite: Der Logarithmus einer Summe ist ***nicht*** die Summe der Logarithmen, das Gesetz (1) sagt etwas anderes.
- Rechte Seite: Der Logarithmus von Null ist nicht etwa Null, sondern nicht definiert.

8.4 Aufgabe 4

$$\begin{aligned} 6^{5x-1} &= 6^{3x+3} && |\log_6 \ldots \\ 5x-1 &= 3x+3 && |+1-3x \\ 2x &= 4 && |:2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

8.5 Aufgabe 5

$$\begin{aligned} 2^{2x+1}\cdot 2^{2x+1} &= 2^{5x-5} \\ 2^{2x+1+2x+1} &= 2^{5x-5} \\ 2^{4x+2} &= 2^{5x-5} && |\log_2\ldots \\ 4x+2 &= 5x-5 && |-2-5x \\ -x &= -7 && |:(-1) \\ x &= 7 \end{aligned}$$

8.6 Aufgabe 6

$$\begin{aligned} 2^{2x+1}+2^{2x+1} &= 2^{5x-7} \\ 2\cdot 2^{2x+1} &= 2^{5x-7} \\ 2^1\cdot 2^{2x+1} &= 2^{5x-7} \\ 2^{1+2x+1} &= 2^{5x-7} && |\log_2\ldots \\ 1+2x+1 &= 5x-7 && |-5x-2 \\ -3x &= -9 && |:(-3) \\ x &= 3 \end{aligned}$$

8.7 Aufgabe 7

$$\begin{aligned} 3^{3x+1} &= 3^{2x-1}\cdot 3^{2x-1} && |\log_3\ldots \\ 3x+1 &= \log_3\left(3^{2x-1}\cdot 3^{2x-1}\right) \\ 3x+1 &= \log_3 3^{2x-1}+\log_3 3^{2x-1} \\ 3x+1 &= 2x-1+2x-1 \\ 3x+1 &= 4x-2 && |-1-4x \\ -x &= -3 && |\cdot(-1) \\ x &= 3 \end{aligned}$$

8.8 Aufgabe 8

$$\begin{aligned} 3^{3x+1} &= 3^{2x-1}+2\cdot 3^{2x-1} \\ 3^{3x+1} &= (1+2)\cdot 3^{2x-1} \\ 3^{3x+1} &= 3\cdot 3^{2x-1} \\ 3^{3x+1} &= 3^1\cdot 3^{2x-1} \\ 3^{3x+1} &= 3^{1+2x-1} && |\log_3\ldots \\ 3x+1 &= 2x && |-1-2x \\ x &= -1 \end{aligned}$$

8.9 Aufgabe 9

$$
\begin{aligned}
2 \cdot 5^{3x+3} \cdot 3 \cdot 5^{3x+3} &= 5^{4x} && |\ln \ldots \\
\ln 2 + \ln 5^{3x+3} + \ln 3 + \ln 5^{3x+3} &= \ln 5^{4x} \\
\ln 2 + (3x+3)\ln 5 + \ln 3 + (3x+3)\ln 5 &= 4x \ln 5 \\
\ln 2 + 3x\ln 5 + 3\ln 5 + \ln 3 + 3x\ln 5 + 3\ln 5 &= 4x\ln 5 \\
\ln 2 + 6x\ln 5 + 6\ln 5 + \ln 3 &= 4x\ln 5 && |-4x\ln 5 - \ln 2 - 6\ln 5 - \ln 3 \\
6x\ln 5 - 4x\ln 5 &= -\ln 2 - 6\ln 5 - \ln 3 \\
(6\ln 5 - 4\ln 5)x &= -\ln 2 - 6\ln 5 - \ln 3 && |:(\ldots) \\
x &= \frac{-\ln 2 - 6\ln 5 - \ln 3}{6\ln 5 - 4\ln 5} \\
x &\approx -3,5566\ldots
\end{aligned}
$$

8.10 Aufgabe 10

$$
\begin{aligned}
2 \cdot 5^{3x+3} + 3 \cdot 5^{3x+3} &= 5^{4x} \\
(2+3) \cdot 5^{3x+3} &= 5^{4x} \\
5 \cdot 5^{3x+3} &= 5^{4x} \\
5^{1+3x+3} &= 5^{4x} \\
5^{3x+4} &= 5^{4x} && |\log_5 \ldots \\
3x+4 &= 4x && |-4x-4 \\
-x &= -4 && |\cdot(-1) \\
x &= 4
\end{aligned}
$$

8.11 Aufgabe 11

$$\begin{aligned}
12\cdot 3^{2x-3}\cdot 2^{x-3} &= 6^{x-1} && |\ln\ldots\\
\ln 12+\ln 3^{2x-3}+\ln 2^{x-3} &= \ln 6^{x-1}\\
\ln 12+(2x-3)\ln 3+(x-3)\ln 2 &= (x-1)\ln 6\\
\ln 12+2x\ln 3-3\ln 3+x\ln 2-3\ln 2 &= x\ln 6-\ln 6 && |-\ln 12+3\ln 3+3\ln 2-x\ln 6\\
2x\ln 3+x\ln 2-x\ln 6 &= -\ln 6-\ln 12+3\ln 3+3\ln 2\\
x(2\ln 3+\ln 2-\ln 6) &= -\ln 6-\ln 12+3\ln 3+3\ln 2 && |:(\ldots)\\
x &= \frac{-\ln 6-\ln 12+3\ln 3+3\ln 2}{2\ln 3+\ln 2-\ln 6}\\
x &= 1
\end{aligned}$$

8.12 Aufgabe 12

$$\begin{aligned}
3\cdot 2^{4x-7}+2^{4x-7} &= 8\\
(3+1)\cdot 2^{4x-7} &= 8\\
2^2\cdot 2^{4x-7} &= 2^3\\
2^{2+4x-7} &= 2^3 && |\log_2\ldots\\
2+4x-7 &= 3 && |+5\\
4x &= 8 && |:4\\
x &= 2
\end{aligned}$$

8.13 Aufgabe 13

$$\begin{aligned}
2^{-x+3}\cdot 5^{2x+12} &= 10^{3x+15} && |\ln\ldots\\
\ln 2^{-x+3}+\ln 5^{2x+12} &= \ln 10^{3x+15}\\
(-x+3)\ln 2+(2x+12)\ln 5 &= (3x+15)\ln 10\\
-x\ln 2+3\ln 2+2x\ln 5+12\ln 5 &= 3x\ln 10+15\ln 10 && |-3\ln 2-12\ln 5-3x\ln 10\\
-x\ln 2+2x\ln 5-3x\ln 10 &= 15\ln 10-3\ln 2-12\ln 5\\
x\cdot(-\ln 2+2\ln 5-3\ln 10) &= 15\ln 10-3\ln 2-12\ln 5 && |:(\ldots)\\
x &= \frac{15\ln 10-3\ln 2-12\ln 5}{-\ln 2+2\ln 5-3\ln 10}\\
x &= -3
\end{aligned}$$

8.14 Aufgabe 14

$$\begin{aligned}
2^{3x-1} \cdot 3^{x+1} &= 12^{2x-2} && |\ln\ldots \\
\ln 2^{3x-1} + \ln 3^{x+1} &= \ln 12^{2x-2} \\
(3x-1)\ln 2 + (x+1)\ln 3 &= (2x-2)\ln 12 \\
3x\ln 2 - \ln 2 + x\ln 3 + \ln 3 &= 2x\ln 12 - 2\ln 12 && |+\ln 2 - \ln 3 - 2x\ln 12 \\
3x\ln 2 + x\ln 3 - 2x\ln 12 &= -2\ln 12 + \ln 2 - \ln 3 \\
x(3\ln 2 + \ln 3 - 2\ln 12) &= -2\ln 12 + \ln 2 - \ln 3 && |:(\ldots) \\
x &= \frac{-2\ln 12 + \ln 2 - \ln 3}{3\ln 2 + \ln 3 - 2\ln 12} \\
x &= 3
\end{aligned}$$

8.15 Aufgabe 15

$$\begin{aligned}
\frac{2^{2x+2}}{3^{4x-4}} &= \frac{2^{3x} \cdot 3^{2x-4}}{3^{x+2}} && |\ln\ldots \\
\ln 2^{2x+2} - \ln 3^{4x-4} &= \ln 2^{3x} + \ln 3^{2x-4} - \ln 3^{x+2} \\
(2x+2)\ln 2 - (4x-4)\ln 3 &= 3x\ln 2 + (2x-4)\ln 3 - (x+2)\ln 3 \\
2x\ln 2 + 2\ln 2 - 4x\ln 3 + 4\ln 3 &= 3x\ln 2 + 2x\ln 3 - 4\ln 3 - x\ln 3 - 2\ln 3 \\
2x\ln 2 - 4x\ln 3 - 3x\ln 2 - 2x\ln 3 + x\ln 3 &= -4\ln 3 - 2\ln 3 - 2\ln 2 - 4\ln 3 \\
x \cdot (2\ln 2 - 4\ln 3 - 3\ln 2 - 2\ln 3 + \ln 3) &= -4\ln 3 - 2\ln 3 - 2\ln 2 - 4\ln 3 \\
x &= \frac{-4\ln 3 - 2\ln 3 - 2\ln 2 - 4\ln 3}{2\ln 2 - 4\ln 3 - 3\ln 2 - 2\ln 3 + \ln 3} \\
x &= 2
\end{aligned}$$

8.16 Aufgabe 16

$$\begin{aligned}
\frac{3^{x-2}}{5^{2x-8}} &= \frac{5^{3x-7}\cdot 2^{3x-8}}{3^{2x-7}\cdot 2^{x-2}} \\
\frac{3^{x-2}}{5^{2x-8}} &= \frac{5^{3x-7}\cdot 2^{3x-8-x+2}}{3^{2x-7}} && |\cdot(5^{2x-8})\cdot(3^{2x-7}) \\
3^{x-2+2x-7} &= 5^{3x-7+2x-8}\cdot 2^{2x-6} \\
3^{3x-9} &= 5^{5x-15}\cdot 2^{2x-6} && |\ln\ldots \\
\ln 3^{3x-9} &= \ln 5^{5x-15}+\ln 2^{2x-6} \\
(3x-9)\ln 3 &= (5x-15)\ln 5+(2x-6)\ln 2 \\
3x\ln 3-9\ln 3 &= 5x\ln 5-15\ln 5+2x\ln 2-6\ln 2 \\
3x\ln 3-5x\ln 5-2x\ln 2 &= -15\ln 5-6\ln 2+9\ln 3 \\
x\cdot(3\ln 3-5\ln 5-2\ln 2) &= -15\ln 5-6\ln 2+9\ln 3 \\
x &= \frac{-15\ln 5-6\ln 2+9\ln 3}{3\ln 3-5\ln 5-2\ln 2} \\
x &= 3
\end{aligned}$$

8.17 Aufgabe 17

$$\begin{aligned}
8^{x+4}\cdot 16^{x+3} &= 32^{x+4}\cdot 4 \\
(2^3)^{x+4}\cdot(2^4)^{x+3} &= (2^5)^{x+4}\cdot 2^2 \\
2^{3\cdot(x+4)}\cdot 2^{4\cdot(x+3)} &= 2^{5\cdot(x+4)}\cdot 2^2 \\
2^{3x+12+4x+12} &= 2^{5x+20+2} \\
2^{7x+24} &= 2^{5x+22} && |\log_2\ldots \\
7x+24 &= 5x+22 && |-5x-24 \\
2x &= -2 && |:2 \\
x &= -1
\end{aligned}$$

8.18 Aufgabe 18

$$\begin{aligned}
81^{3x}\cdot 27^{4x+1}\cdot 9^{2x-1} &= 3^{5x+1} \\
(3^4)^{3x}\cdot(3^3)^{4x+1}\cdot(3^2)^{2x-1} &= 3^{5x+1} \\
3^{4\cdot 3x}\cdot 3^{3\cdot(4x+1)}\cdot 3^{2\cdot(2x-1)} &= 3^{5x+1} \\
3^{12x}\cdot 3^{12x+3}\cdot 3^{4x-2} &= 3^{5x+1} \\
3^{12x+12x+3+4x-2} &= 3^{5x+1} \\
3^{28x+1} &= 3^{5x+1} && |\log_3\ldots \\
28x+1 &= 5x+1 && |-5x-1 \\
23x &= 0 && |:23 \\
x &= 0
\end{aligned}$$

8.19 Aufgabe 19

$$\begin{aligned}
14^{2x+7} \cdot 7^{x-1} &= 2^{3x+9} && \mid \ln \ldots \\
\ln 14^{2x+7} + \ln 7^{x-1} &= \ln 2^{3x+9} \\
(2x+7)\ln 14 + (x-1)\ln 7 &= (3x+9)\ln 2 \\
2x\ln 14 + 7\ln 14 + x\ln 7 - \ln 7 &= 3x\ln 2 + 9\ln 2 && \mid -3x\ln 2 - 7\ln 14 + \ln 7 \\
2x\ln 14 + x\ln 7 - 3x\ln 2 &= 9\ln 2 - 7\ln 14 + \ln 7 \\
x \cdot (2\ln 14 + \ln 7 - 3\ln 2) &= 9\ln 2 - 7\ln 14 + \ln 7 && \mid : (\ldots) \\
x &= \frac{9\ln 2 - 7\ln 14 + \ln 7}{2\ln 14 + \ln 7 - 3\ln 2} \\
x &= -2
\end{aligned}$$

8.20 Aufgabe 20

$$\begin{aligned}
6^{-2x} \cdot 2^{x} &= 18^{x+6} && \mid \ln \ldots \\
\ln 6^{-2x} + \ln 2^{x} &= \ln 18^{x+6} \\
-2x\ln 6 + x\ln 2 &= (x+6)\ln 18 \\
-2x\ln 6 + x\ln 2 &= x\ln 18 + 6\ln 18 && \mid -x\ln 18 \\
-2x\ln 6 + x\ln 2 - x\ln 18 &= 6\ln 18 && \mid -x\ln 18 \\
x \cdot (-2\ln 6 + \ln 2 - \ln 18) &= 6\ln 18 && \mid -x\ln 18 \quad \mid : (\ldots) \\
x &= \frac{6\ln 18}{-2\ln 6 + \ln 2 - \ln 18} \\
x &= -3
\end{aligned}$$

8.21 Aufgabe 21

$$\begin{aligned}
\frac{12^{2x-2}}{4^{3x-4}} &= 3^{4x-6} && \mid \cdot 4^{3x-4} \\
12^{2x-2} &= 3^{4x-6} \cdot 4^{3x-4} && \mid \ln \ldots \\
\ln 12^{2x-2} &= \ln 3^{4x-6} + \ln 4^{3x-4} \\
(2x-2)\ln 12 &= (4x-6)\ln 3 + (3x-4)\ln 4 \\
2x\ln 12 - 2\ln 12 &= 4x\ln 3 - 6\ln 3 + 3x\ln 4 - 4\ln 4 && \mid +2\ln 12 - 4x\ln 3 - 3x\ln 4 \\
2x\ln 12 - 4x\ln 3 - 3x\ln 4 &= -6\ln 3 - 4\ln 4 + 2\ln 12 \\
x \cdot (2\ln 12 - 4\ln 3 - 3\ln 4) &= -6\ln 3 - 4\ln 4 + 2\ln 12 && \mid : (\ldots) \\
x &= \frac{-6\ln 3 - 4\ln 4 + 2\ln 12}{2\ln 12 - 4\ln 3 - 3\ln 4} \\
x &= 2
\end{aligned}$$

8.22 Aufgabe 22

$$\begin{aligned}
\frac{54^{2x-11}}{9^{3x-20}} &= 6^{x-2} && |\ln\ldots \\
\ln 54^{2x-11} - \ln 9^{3x-20} &= \ln 6^{x-2} \\
(2x-11)\ln 54 - (3x-20)\ln 9 &= (x-2)\ln 6 \\
2x\ln 54 - 11\ln 54 - 3x\ln 9 + 20\ln 9 &= x\ln 6 - 2\ln 6 && | + 11\ln 54 - 20\ln 9 - x\ln 6 \\
2x\ln 54 - 3x\ln 9 - x\ln 6 &= -2\ln 6 + 11\ln 54 - 20\ln 9 \\
x\cdot(2\ln 54 - 3\ln 9 - \ln 6) &= -2\ln 6 + 11\ln 54 - 20\ln 9 && | : (\ldots) \\
x &= \frac{-2\ln 6 + 11\ln 54 - 20\ln 9}{2\ln 54 - 3\ln 9 - \ln 6} \\
x &= 9
\end{aligned}$$

8.23 Aufgabe 23

$$\begin{aligned}
\frac{4^{x+1}}{81^{x-1}} &= \frac{8^x\cdot 9^{x-2}}{3^{x+2}} && |\cdot 81^{x-1} : 8^x \\
\frac{4^{x+1}}{8^x} &= \frac{81^{x-1}\cdot 9^{x-2}}{3^{x+2}} \\
\frac{(2^2)^{x+1}}{(2^3)^x} &= \frac{(3^4)^{x-1}\cdot (3^2)^{x-2}}{3^{x+2}} \\
\frac{2^{2x+2}}{2^{3x}} &= \frac{3^{4x-4}\cdot 3^{2x-4}}{3^{x+2}} \\
2^{2x+2-3x} &= 3^{4x-4+2x-4-x-2} \\
2^{-x+2} &= 3^{5x-10} && |\ln\ldots \\
\ln 2^{-x+2} &= \ln 3^{5x-10} \\
(-x+2)\ln 2 &= (5x-10)\ln 3 \\
-x\ln 2 + 2\ln 2 &= 5x\ln 3 - 10\ln 3 && | - 2\ln 2 - 5x\ln 3 \\
-x\ln 2 - 5x\ln 3 &= -10\ln 3 - 2\ln 2 \\
x\cdot(-\ln 2 - 5\ln 3) &= -10\ln 3 - 2\ln 2 && | : (\ldots) \\
x &= \frac{-10\ln 3 - 2\ln 2}{-\ln 2 - 5\ln 3} \\
x &= 2
\end{aligned}$$

8.24 Aufgabe 24

$$
\begin{aligned}
\frac{5^{x+9}}{10^{2x+13}} &= \frac{2^{x+2}}{5^{x+4}} && |\ln\ldots \\
\ln 5^{x+9} - \ln 10^{2x+13} &= \ln 2^{x+2} - \ln 5^{x+4} \\
(x+9)\ln 5 - (2x+13)\ln 10 &= (x+2)\ln 2 - (x+4)\ln 5 \\
x\ln 5 + 9\ln 5 - 2x\ln 10 - 13\ln 10 &= x\ln 2 + 2\ln 2 - x\ln 5 - 4\ln 5 && |-9\ln 5 + 13\ln 10 - x\ln 2 + x\ln 5 \\
x\ln 5 - 2x\ln 10 - x\ln 2 + x\ln 5 &= 2\ln 2 - 4\ln 5 - 9\ln 5 + 13\ln 10 \\
x\cdot(\ln 5 - 2\ln 10 - \ln 2 + \ln 5) &= 2\ln 2 - 4\ln 5 - 9\ln 5 + 13\ln 10 && |:(\ldots) \\
x &= \frac{2\ln 2 - 4\ln 5 - 9\ln 5 + 13\ln 10}{\ln 5 - 2\ln 10 - \ln 2 + \ln 5} \\
x &= -5
\end{aligned}
$$

8.25 Aufgabe 25

$$
\begin{aligned}
\frac{7^{2x+4}}{7^{3x+5}} &= 5^{x+1} \\
7^{2x+4-3x-5} &= 5^{x+1} \\
7^{-x-1} &= 5^{x+1} && |\ln\ldots \\
\ln 7^{-x-1} &= \ln 5^{x+1} \\
(-x-1)\ln 7 &= (x+1)\ln 5 \\
-x\ln 7 - \ln 7 &= x\ln 5 + \ln 5 && |+\ln 7 - x\ln 5 \\
-x\ln 7 - x\ln 5 &= \ln 5 + \ln 7 \\
x\cdot(-\ln 7 - \ln 5) &= \ln 5 + \ln 7 && |:(\ldots) \\
x &= \frac{\ln 5 + \ln 7}{-\ln 7 - \ln 5} \\
x &= -1
\end{aligned}
$$

8.26 Aufgabe 26

$$\begin{aligned}
\frac{5^{2x+1}}{7^{3x-9}} &= 5^{x+4} && |\cdot(7^{3x-9}):(5^{x+4})\\
\frac{5^{2x+1}}{5^{x+4}} &= 7^{3x-9}\\
5^{2x+1-x-4} &= 7^{3x-9}\\
5^{x-3} &= 7^{3x-9} && |\ln\ldots\\
\ln 5^{x-3} &= \ln 7^{3x-9}\\
(x-3)\ln 5 &= (3x-9)\ln 7\\
x\ln 5-3\ln 5 &= 3x\ln 7-9\ln 7 && |+3\ln 5-3x\ln 7\\
x\ln 5-3x\ln 7 &= -9\ln 7+3\ln 5\\
x\cdot(\ln 5-3\ln 7) &= -9\ln 7+3\ln 5 && |:(\ln 5-3\ln 7)\\
x &= \frac{-9\ln 7+3\ln 5}{\ln 5-3\ln 7}\\
x &= 3
\end{aligned}$$

8.27 Aufgabe 27

$$\begin{aligned}
125^{x+3}\cdot 25^{x+5} &= 625^{x-1}\\
(5^3)^{x+3}\cdot(5^2)^{x+5} &= (5^4)^{x-1}\\
5^{3x+9}\cdot 5^{2x+10} &= 5^{4x-4} && |\log_5\ldots\\
3x+9+2x+10 &= 4x-4\\
5x+19 &= 4x-4 && |-19-4x\\
x &= -23
\end{aligned}$$

8.28 Aufgabe 28

$$\begin{aligned}
81^{x+2}\cdot 9^{x-3} &= 27^{2x-3}\\
(3^4)^{x+2}\cdot(3^2)^{x-3} &= (3^3)^{2x-3}\\
3^{4x+8}\cdot 3^{2x-6} &= 3^{6x-9}\\
3^{6x+2} &= 3^{6x-9} && |\log_3\ldots\\
6x+2 &= 6x-9 && |-6x\\
2 &= -9
\end{aligned}$$

Das Ergebnis stellt eine **falsche Aussage** dar, daher ist die Lösungsmenge leer. Es gibt keine Lösung.

8.29 Aufgabe 29

$$\begin{aligned}
\left(5^{3x}\right)^2 \cdot \left(5^4\right)^{x-2} &= \left(5^{2x}\right)^3 \\
5^{6x} \cdot 5^{4x-8} &= 5^{6x} \\
5^{6x+4x-8} &= 5^{6x} \\
5^{10x-8} &= 5^{6x} && |\log_5 \ldots \\
10x - 8 &= 6x && | + 8 - 6x \\
4x &= 8 && | : 4 \\
x &= 2
\end{aligned}$$

8.30 Aufgabe 30

$$\begin{aligned}
\left(3^{6x}\right)^2 \cdot \left(2^4\right)^{x-1} &= \left(3^{4x}\right)^3 \\
3^{12x} \cdot 2^{4x-4} &= 3^{12x} && | : 3^{12x} \\
2^{4x-4} &= \frac{3^{12x}}{3^{12x}} \\
2^{4x-4} &= 1 && |\log_2 \ldots \\
4x - 4 &= 0 && | + 4 \\
4x &= 4 && | : 4 \\
x &= 1
\end{aligned}$$

8.31 Aufgabe 31

$$\begin{aligned}
\frac{e^{4x+5}}{e^{6x-2}} &= 10^{2x-7} \\
e^{4x+5-6x+2} &= 10^{2x-7} \\
e^{-2x+7} &= 10^{2x-7} \ln \ldots \\
-2x + 7 &= \ln 10^{2x-7} \\
-2x + 7 &= (2x - 7) \ln 10 \\
-2x + 7 &= 2x \ln 10 - 7 \ln 10 && | - 7 - 2x \ln 10 \\
-2x - 2x \ln 10 &= -7 \ln 10 - 7 \\
x \cdot (-2 - 2 \ln 10) &= -7 \ln 10 - 7 && | : (\ldots) \\
x &= \frac{-7 \ln 10 - 7}{-2 - 2 \ln 10} \\
x &= \frac{7 \cdot (-\ln 10 - 1)}{2 \cdot (-\ln 10 - 1)} \\
x &= \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

8.32 Aufgabe 32

$$\begin{aligned}
\frac{2^{x+6}}{10^{4x+12}} &= \frac{4^{2x+8}}{20^{2-x}} && |\ln\ldots \\
\ln 2^{x+6} - \ln 10^{4x+12} &= \ln 4^{2x+8} - \ln 20^{2-x} \\
(x+6)\ln 2 - (4x+12)\ln 10 &= (2x+8)\ln 4 - (2-x)\ln 20 \\
x\ln 2 + 6\ln 2 - 4x\ln 10 - 12\ln 10 &= 2x\ln 4 + 8\ln 4 - 2\ln 20 + x\ln 20 \\
x\ln 2 - 4x\ln 10 - 2x\ln 4 - x\ln 20 &= 8\ln 4 - 2\ln 20 - 6\ln 2 + 12\ln 10 \\
x\cdot(\ln 2 - 4\ln 10 - 2\ln 4 - \ln 20) &= 8\ln 4 - 2\ln 20 - 6\ln 2 + 12\ln 10 && |:(\ldots) \\
x &= \frac{8\ln 4 - 2\ln 20 - 6\ln 2 + 12\ln 10}{\ln 2 - 4\ln 10 - 2\ln 4 - \ln 20} \\
x &= -2
\end{aligned}$$